Т.е. эл-т из $\mathfrak{g}$ это компонента степени 1

$\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K. Пусть, далее, $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ — алгебра над K_1, получающаяся из $\mathfrak{g}$ расширением кольца скаляров (см. n° 1). Тогда $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ является алгеброй Ли. Если $\mathfrak{a}$ — подалгебра (соотв. идеал) алгебры $\mathfrak{g}$, то канонический образ алгебры $\mathfrak{a}_{(K_1)}$ в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ есть подалгебра (соотв. идеал) в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$, то канонический образ в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ модуля $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_{(K_1)}$ равен взаимному коммутанту канонических образов модулей $\mathfrak{a}_{(K_1)}$ и $\mathfrak{b}_{(K_1)}$. Отсюда следует, что $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)})$ является каноническим образом $(\mathscr{D}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}$ и что $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)})$ — канонический образ $(\mathscr{C}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}$.

Если K — поле, K_1 — подполе K и σ — каноническое вложение K в K_1, то, имея в виду обычные отождествления, получим

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_{(K_1)} = [\mathfrak{a}_{(K_1)}, \mathfrak{b}_{(K_1)}], \quad \mathscr{D}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)}) = (\mathscr{D}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}, \quad \mathscr{C}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)}) = (\mathscr{C}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}.$$

Такого сорта результаты будут получены и в § 2, n° 9.

Если M — конечномерное векторное пространство над полем K, то $M_{(K_1)}$ — конечномерное векторное пространство над K_1, и ассоциативная алгебра $\mathscr{L}(M_{(K_1)})$ канонически отождествляется с ассоциативной алгеброй $\mathscr{L}(M)_{(K_1)}$. Поэтому алгебра Ли $\mathfrak{gl}(M_{(K_1)})$ канонически отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(M)_{(K_1)}$.

§ 2. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли

1. *Определение универсальной обертывающей алгебры*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K. Для любой ассоциативной алгебры L с единицей над K назовем α-отображением алгебры $\mathfrak{g}$ в L K-линейное отображение σ алгебры $\mathfrak{g}$ в L, такое, что

$$\sigma([x, y]) = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) \qquad (x, y \text{ из } \mathfrak{g})$$

(другими словами, гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли, ассоциированную с L).

Если L' — другая ассоциативная алгебра с единицей над K и τ — гомоморфизм L в L', переводящий 1 в 1, то $\tau \circ \sigma$ есть α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в L'. Отыщем ассоциативную алгебру с единицей над K и α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в эту алгебру, являющееся *универсальным* (*Теор. множ.*, гл. IV, § 3, n° 1).

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, T — тензорная алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$ и J — ее двусторонний идеал, порожденный тензорами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, где $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$. Ассоциативная алгебра $U = T/J$ называется универсальной обертывающей алгеброй для $\mathfrak{g}$. Ограничение на $\mathfrak{g}$ канонического отображения алгебры T на U называется каноническим отображеним $\mathfrak{g}$ в U.*

Т.к. компоненты степени 0 это эл. кольца K над которым дана наша алгебра Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть T_+ — двусторонний идеал в T, образованный тензорами, компонента степени 0 которых равна нулю. Пусть $T_0 = K \cdot 1$ — множество элементов степени 0 алгебры T. Пусть, далее, U_+ и U_0 — канонические образы T_+ и T_0 в U. Так как $J \subset T_+$, то прямое разложение $T = T_0 \oplus T_+$ индуцирует прямое разложение $U = U_0 \oplus U_+$. Алгебра U обладает поэтому отличным от нуля единичным элементом и $U_0 = K \cdot 1$. Компонента элемента $x \in U$, лежащая в U_0, называется его *свободным членом*. Элементы со свободным членом, равным нулю, образуют двусторонний идеал в U, а именно двусторонний идеал U_+, порожденный каноническим образом алгебры $\mathfrak{g}$ в U.

Т.к. T порожден $\mathfrak{g}$ и K.

Ассоциативная алгебра U порождена 1 и каноническим образом алгебры $\mathfrak{g}$ в U.

Если $x \in \mathfrak{g}$ и $y \in \mathfrak{g}$, то $x \otimes y - y \otimes x$ и $[x, y]$ сравнимы в T по модулю J; следовательно, если σ_0 обозначает каноническое отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в U, то

$$\sigma_0(x)\,\sigma_0(y) - \sigma_0(y)\,\sigma_0(x) = \sigma_0([x, y])$$

в U. Другими словами, σ_0 есть α-отображение $\mathfrak{g}$ в U.

Предложение 1. *Пусть σ есть α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в ассоциативную алгебру L с единицей. Существует, и притом только один, гомоморфизм $\tau\colon U \to L$, переводящий 1 в 1, такой, что $\sigma = \tau \circ \sigma_0$, где σ_0 обозначает каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U.*

В самом деле, пусть τ' — единственный гомоморфизм алгебры T в L, который продолжает σ и переводит 1 в 1. Тогда для x, y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\tau'(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \sigma(x)\,\sigma(y) - \sigma(y)\,\sigma(x) - \sigma([x, y]) = 0,$$

так что τ' обращается в нуль на J и определяет посредством факторизации гомоморфизм τ алгебры U в алгебру L, переводящий 1 в 1, такой, что $\sigma = \tau \circ \sigma_0$. Единственность τ немедленно вытекает из того, что $\sigma_0(\mathfrak{g})$ и 1 порождают алгебру U.

Пусть $\mathfrak{g}'$ — другая алгебра Ли над K, U' — ее универсальная обертывающая алгебра, а σ_0' — каноническое отображение $\mathfrak{g}'$ в U'. Пусть φ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$. В этом случае $\sigma_0' \circ \varphi$ есть α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в U'; поэтому существует, и притом один, гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ алгебры U в U', переводящий 1 в 1 и такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & \mathfrak{g}' \arrow[d, "\sigma_0'"] \\ U \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & U' \end{tikzcd}$$

Т.к. $x \in U_0 \cap U_+ \Rightarrow \exists a \in T_0\ \exists b \in T_+$:
$a + J = b + J \Rightarrow a \in b + J \subset T_+$ но $T_0 \cap T_+ = \varnothing$

Алгебру U/R отождествляют с алгеброй W при помощи гомоморфизма φ. В этом случае каноническое отображение σ'' факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в W отождествляется с θ, т. е. отображение $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в U/R получается из σ посредством факторизации.

4. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли, противоположной к данной

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, $\mathfrak{g}^0$ — противоположная к ней алгебра, σ и σ_0 — канонические отображения алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^0$ в их универсальные обертывающие алгебры U и V. В этом случае σ является α-отображением алгебры Ли $\mathfrak{g}^0$ в ассоциативную алгебру U^0, противоположную к ассоциативной алгебре U. Следовательно, существует, и притом только один, гомоморфизм φ алгебры V в алгебру U^0, переводящий 1 в 1 и такой, что $\sigma = \varphi \circ \sigma_0$.

Предложение 4. *Гомоморфизм φ является изоморфизмом алгебры V на U^0.*

В самом деле, существует гомоморфизм φ' алгебры U в алгебру V^0, переводящий 1 в 1 и такой, что $\sigma_0 = \varphi' \circ \sigma$. Можно рассматривать φ' как гомоморфизм алгебры U^0 в V. Имеем $\sigma_0 = \varphi' \circ \varphi \circ \sigma_0$ и $\sigma = \varphi \circ \varphi' \circ \sigma$, откуда $\varphi' \circ \varphi$ и $\varphi \circ \varphi'$ суть тождественные отображения алгебр V и U. Предложение доказано.

Принято отождествлять V с U^0 при помощи изоморфизма φ. В этом случае σ_0 отождествляется с σ.

Тем самым установлено, что изоморфизм $\theta: x \mapsto -x$ алгебры $\mathfrak{g}$ на алгебру $\mathfrak{g}^0$ определяет изоморфизм $\tilde{\theta}$ алгебры U на алгебру $V = U^0$. Этот изоморфизм можно рассматривать как антиавтоморфизм алгебры U. Он называется *главным антиавтоморфизмом* алгебры U. Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из $\mathfrak{g}$, то

$$\tilde{\theta}(\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_n)) = \tilde{\theta}(\sigma(x_n)) \ldots \tilde{\theta}(\sigma(x_1)) = (-\sigma(x_n)) \ldots (-\sigma(x_1)) = \\ = (-1)^n \sigma(x_n) \ldots \sigma(x_1). \quad (2)$$

5. Симметрическая алгебра модуля

Пусть V есть K-модуль. Его можно, причем единственным образом, рассматривать как коммутативную алгебру Ли. Универсальная обертывающая алгебра для V может быть тогда получена следующим образом. Пусть T — тензорная алгебра модуля V, а I — двусторонний идеал в T, порожденный тензорами вида $x \otimes y - y \otimes x$ ($x \in V$, $y \in V$). В качестве искомой алгебры нужно взять факторалгебру $S = T/I$.

т. с $\forall x, y\ [x, y] = 0$

т.к. $(I\cap T^2_2)\cap(I\cap T^3)=\varnothing$ т.к. $T^2\cap T^3=\varnothing$

Мы будем изучать в дальнейшем эту алгебру S, называя ее *симметрической алгеброй* модуля V. Кратко приведем ее свойства, которые понадобятся нам в этой главе и доказательство которых тривиально. Пусть T^n — множество однородных тензоров степени n в T. Имеем $I=(I\cap T^2)\oplus(I\cap T^3)\oplus\ldots$, так что S является прямой суммой канонических образов S^n этих подмножеств T^n. Элементы из S^n называются однородными элементами степени n. Имеем $S^0=K\cdot 1$, S^1 отождествляется с V и $S^nS^p\subset S^{n+p}$. Алгебра S порождается 1 и $S^1=V$. Ясно, что любые два элемента из S^1 перестановочны, поэтому S коммутативна. Если V — *свободный* K-модуль с базисом $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, то канонический гомоморфизм f алгебры многочленов $K[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ на S, который переводит 1 в 1 и X_λ в x_λ для всех $\lambda\in\Lambda$, является изоморфизмом. В самом деле, вследствие универсального свойства алгебры S (n° 1, предложение 1) существует гомоморфизм g алгебры S в $K[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$, переводящий 1 в 1 и x_λ в X_λ для всех $\lambda\in\Lambda$, так что f и g — два взаимно обратных гомоморфизма.

Пусть $S'^n\subset T^n$ — множество однородных симметрических элементов (тензоров) порядка n (*Алг.*, гл. III, § 5, n° 1, определение 2). Если K — поле характеристики 0, то S'^n и $I\cap T^n$ дополняют друг друга в T^n. В самом деле, пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — базис в V. Введем на Λ полный порядок (*Теор. множ.*, гл. III, § 2, n° 3, теорема 1). Пусть Λ_n — множество неубывающих строк из n элементов множества Λ. Для $M=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda_n$ положим

$$y_M=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{\lambda_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes x_{\lambda_{\sigma(n)}}.$$

Элементы y_M, где $M\in\Lambda_n$, составляют систему образующих векторного K-пространства S'^n. В то же время их канонические образы в S^n образуют, как это следует из сказанного выше, базис в S^n. Поэтому $(y_M)_{M\in\Lambda_n}$ является базисом дополнения к $I\cap T^n$ в T^n (*Алг.*, гл. II, § 1, n° 6, предложение 4), что и доказывает наше утверждение.

Итак, если K — поле характеристики 0, то ограничение на S'^n канонического отображения $T^n\to S^n$ является изоморфизмом пространства S'^n на пространство S^n и обладает поэтому обратным изоморфизмом. Полученные таким образом для любого n обратные изоморфизмы определяют канонический изоморфизм пространства S на пространство $S'=\sum_{n\geqslant 0}S'^n$ симметрических тензоров алгебры T.

т.к. базис переходит в базис

6. Фильтрация универсальной обертывающей алгебры

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, а T — тензорная алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$. Пусть T^n — подмодуль модуля T, образованный однородными тензорами степени n, и $T_n = \sum_{i \leqslant n} T^i$. Имеем $T_n \subset T_{n+1}$, $T_0 = K \cdot 1$, $T_{-1} = \{0\}$ и $T_n T_p \subset T_{n+p}$. Пусть U_n — канонический образ T_n в универсальной обертывающей алгебре U алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $U_n \subset U_{n+1}$, $U_0 = K \cdot 1$, $U_{-1} = \{0\}$ и $U_n U_p \subset U_{n+p}$; можно поэтому говорить, что U есть алгебра, *фильтрованная* подпространствами U_n (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 1); будем говорить, что элементы из U_n имеют *фильтрацию* $\leqslant n$.

Пусть G^n есть K-модуль U_n/U_{n-1} и G — прямая сумма K-модулей G^n. Умножение на U определяет посредством факторизации билинейное отображение $G^n \times G^m$ в G^{n+m} и, следовательно, билинейное отображение $G \times G$ в G, которое является ассоциативным. Таким образом, G оказывается наделенным структурой ассоциативной K-алгебры. Имеем $G^n G^m \subset G^{n+m}$. Говорят, что элементы из G^n имеют *степень* n. Полученная таким образом градуированная алгебра есть не что иное, как градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй U (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 3).

Пусть φ_n — произведение канонических K-линейных отображений

$$T^n \to U_n \to G^n.$$

канонич образ всегда
сюръективно

Так как T^n дополняет T_{n-1} в T_n, то φ_n сюръективно. Отображения φ_n определяют K-линейное отображение φ модуля $\sum_n T^n = T$ на $\sum_n G^n = G$.

Предложение 5. *Отображение φ модуля T на G является гомоморфизмом алгебр, переводящим* 1 *в* 1 *и аннулирующимся на двустороннем идеале, порожденном тензорами* $x \otimes y - y \otimes x$ $(x \in \mathfrak{g},\ y \in \mathfrak{g})$.

Если $t \in T^n$ и $t' \in T^p$, то $\varphi(t)\varphi(t') = \varphi(tt')$ по определению умножения в G. Поэтому φ является гомоморфизмом алгебр, и ясно, что $\varphi(1) = 1$. Если x, y — элементы из $\mathfrak{g}$, то $x \otimes y - y \otimes x \in T^2$ и канонический образ этого элемента в U_2 равен каноническому образу элемента $[x, y]$, а потому принадлежит U_1. Отсюда $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$, что и доказывает предложение.

Пусть S — симметрическая алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$ и τ — канонический гомоморфизм T на S. Предложение 5 доказывает, что существует, и притом один, *канонический* гомоморфизм ω алгебры S на алгебру G, переводящий 1 в 1 и такой, что $\varphi = \omega \circ \tau$. Имеем $\omega(S^n) = \varphi(T^n) = G^n$. Пусть τ_n — ограничение τ на T^n,

т.к S^n это U^n образ T^n при канонич
отобр

Ψ по J{x⊗y − y⊗x − [x, y]}>

ω_n — ограничение ω на S^n, ψ_n — каноническое отображение T^n в U_n и θ_n — каноническое отображение U_n на G^n. Определение гомоморфизма ω_n доказывает, что следующая диаграмма коммутативна:

U_n кан образ T_n

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[dr, "\theta_n"] & \\ T^n \arrow[ur, "\psi_n"] \arrow[dr, "\tau_n"'] & & G^n \\ & S^n \arrow[ur, "\omega_n"'] & \end{tikzcd} \tag{3}$$

Предложение 6. *Если кольцо K нётерово и если $\mathfrak{g}$ — модуль конечного типа, то кольцо U является нётеровым слева и справа.*

В самом деле, S — алгебра конечного типа над K и поэтому является нётеровым кольцом (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 10, следствие 3 теоремы 2). Следовательно, кольцо G, изоморфное факторкольцу кольца S, является нётеровым. Поэтому U нётерово справа и слева (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 10, *замечание* 2).

Следствие. *Предположим, что K является полем и что алгебра $\mathfrak{g}$ конечномерна над K. Пусть $I_1, \ldots, I_m$ — правые* (соотв. *левые*) *идеалы, имеющие конечную коразмерность в U. Тогда произведение этих идеалов $I_1 I_2 \ldots I_m$ также является идеалом конечной коразмерности.*

Из индуктивных соображений (индукция по m) достаточно рассмотреть случай двух идеалов, например правых. Правый U-модуль I_1 порожден конечным числом элементов $u_1, \ldots, u_p$ (предложение 6). Пусть $v_1, \ldots, v_q$ — элементы из U, чьи классы по модулю I_2 порождают векторное пространство U/I_2. Тогда канонические образы элементов $u_i v_j$ в $I_1/I_1 I_2$ порождают это векторное пространство и, следовательно, оно является конечномерным. Поэтому

$$\dim_K (U/I_1 I_2) = \dim_K (U/I_1) + \dim_K (I_1/I_1 I_2) < +\infty.$$

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}'$ — другая алгебра Ли над кольцом K, U' — ее универсальная обертывающая алгебра, U'_n — множество ее элементов с фильтрацией $\leqslant n$, U^n (соотв. U'^n) — множество канонических образов в U (соотв. U') однородных симметрических тензоров степени n алгебры $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}'$). Пусть η — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$ и $\tilde{\eta}$ — соответствующий гомоморфизм U в U'. Имеем

$$\tilde{\eta}(U_n) \subset U'_n, \qquad \tilde{\eta}(U^n) \subset U'^n.$$

В частности, главный антиавтоморфизм алгебры U оставляет на месте U_n и U^n. Далее, K-линейное отображение T^n на себя, переводящее $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ в $x_n \otimes x_{n-1} \otimes \ldots \otimes x_1$ для любых $x_1, \ldots, x_n$ из $\mathfrak{g}$, является оператором симметрии и, следовательно, оставляет

радикал алгебры A — пересечение максимальных левых идеалов алгебры A. (это двусторонний идеал)

Понятно, что $\mathfrak{n}$ содержит ядро этого представления. Он равен этому ядру в случае, когда M полупрост (предложение 4в)), но не в общем случае. Следует обратить внимание на тот факт, что если для некоторого $x \in \mathfrak{g}$ эндоморфизм x_M нильпотентен, то совсем не обязательно $x \in \mathfrak{n}$.

Отметим еще, что один частный случай леммы 3 дает следующий результат.

Предложение 5. *Пусть V есть n-мерное векторное пространство над K и $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, элементы которой являются нильпотентными эндоморфизмами пространства V. Тогда существует убывающая цепочка подпространств V_0, $V_1, \ldots, V_n$ пространства V размерностей n, $n-1, \ldots, 0$, таких, что $x(V_i) \subset V_{i+1}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

4. Наибольший нильпотентный идеал алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал. Для того чтобы $\mathfrak{a}$ был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \mathfrak{a}$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ был нильпотентным. Это условие, очевидно, достаточно; оно и необходимо, ибо если $\mathfrak{a}$ нильпотентен и если $x \in \mathfrak{a}$, то $\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} x$ нильпотентен и $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ отображает $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{a}$, откуда следует, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентен. Только что доказанное утверждение и предложение 4, примененное к присоединенному представлению $\mathfrak{g}$, дают следующее

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, E — подалгебра ассоциативной алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$, порожденная 1 и всеми $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ $(x \in \mathfrak{g})$. Пусть R — радикал алгебры E.*

а) *Множество $\mathfrak{n}$ элементов $y \in \mathfrak{g}$, таких, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} y \in R$, является наибольшим нильпотентным идеалом в $\mathfrak{g}$.*

б) *Он ортогонален к $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.*

Следует помнить, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ может обладать ненулевыми нильпотентными идеалами.

5. Расширение поля скаляров

Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, K_1 — расширение K и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(K_1)}$. Так как $\mathscr{C}^k\mathfrak{g}' = (\mathscr{C}^n\mathfrak{g})_{(K_1)}$, то $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}'$ нильпотентна.

Пусть M является $\mathfrak{g}$-модулем конечной размерности над K, $\mathfrak{n}$ — наибольший идеал нильпотентности модуля M и $M' = M_{(K_1)}$. Пусть $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — ряд Жордана — Гёльдера $\mathfrak{g}$-модуля M. Имеем $x_M(M_i) \subset M_{i+1}$ для любого i и любого $x \in \mathfrak{n}$, откуда $x'_{M'}((M_i)_{(K_1)}) \subset (M_{i+1})_{(K_1)}$ для любого i и любого $x' \in \mathfrak{n}_{(K_1)}$. По-

Замечания. 1) Нулевая алгебра Ли полупроста. Алгебра размерности 1 или 2 не является полупростой (см. § 5, n° 1, пример 1). Существуют полупростые алгебры размерности 3 (см. n° 7).

2) Центр полупростой алгебры тривиален, поэтому присоединенное представление является точным. т.к. центр - коммут. идеал

3) Если $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ полупросты, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$ полупроста, поскольку проекции на $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ любого коммутативного идеала $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ равны нулю. , а он содержится в произведении проекций.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathfrak{g}$ полупроста;*

б) *радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю;*

в) *форма Киллинга β на $\mathfrak{g}$ невырожденна.*

Кроме того, полупростая алгебра Ли равна своему производному идеалу.

а) $\Rightarrow$ б). Действительно, если $\mathfrak{r} \neq \{0\}$, то последний отличный от нулевой алгебры член производного ряда является коммутативным идеалом в $\mathfrak{g}$. использ. инвариантность ф. К.

б) $\Rightarrow$ в). Это следует из предложения 5б) в § 5, n° 5 (которое доказывает одновременно и последнее утверждение теоремы).

в) $\Rightarrow$ а). Это следует из предложения 6б) в § 4, n° 4. §3.6.7(b)

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в конечномерном пространстве V. Тогда $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$.*

В самом деле, линейная форма $x \mapsto \operatorname{Tr} \rho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ обращается в нуль на любом x вида $[y, z]$ $(y \in \mathfrak{g},\ z \in \mathfrak{g})$, а значит, и на $\mathscr{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — ее точное конечномерное представление. Тогда билинейная форма на $\mathfrak{g}$, ассоциированная с ρ, невырожденна.*

В самом деле, ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно этой формы является разрешимым идеалом (§ 5, n° 4, теорема 2) и, значит, равно нулю.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, β — форма Киллинга, $\mathfrak{a}$ — полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{h}$ к $\mathfrak{a}$ относительно β является дополнительным подпространством к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ и $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то и $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, который будет тогда централизатором $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$.*

Пусть β' — ограничение β на $\mathfrak{a}$. Так как β' — билинейная форма, ассоциированная с представлением $x \mapsto \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве $\mathfrak{g}$, а это представление является точным, то β' невырожденна (предложение 1). Значит, $\mathfrak{h}$ дополнительно к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Кроме того, если x, y лежит в $\mathfrak{a}$ и $z \in \mathfrak{h}$, то $\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z) = 0$, ибо $[x, y] \in \mathfrak{a}$. Поэтому $[y, z] \in \mathfrak{h}$, а это доказывает, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то известно, что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (§ 3, предложение 7) и $\mathfrak{g}$ отождествляется с $\mathfrak{a} \times \mathfrak{h}$. Так как центр идеала $\mathfrak{a}$ равен нулю, то его централизатор в $\mathfrak{g}$ есть $\mathfrak{h}$.

Следствие 2. *Любое расширение полупростой алгебры при помощи полупростой полупросто и тривиально.*

Это сразу вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, то любое ее дифференцирование является внутренним.*

В самом деле, $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{g}$, т. е. полупроста и является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{d}$ дифференцирований $\mathfrak{g}$ (§ 1, предложение 1). Если $D \in \mathfrak{d}$ коммутирует со всеми элементами из $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, то для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $\operatorname{ad} D(x) = [D, \operatorname{ad} x] = 0$, откуда $D(x) = 0$; поэтому $D = 0$. Следствие 3 вытекает теперь из следствия 1.

2. Полупростота представлений

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Ее присоединенное представление полупросто. Все ее идеалы и факторалгебры полупросты.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{b}$ к $\mathfrak{a}$ относительно формы Киллинга является идеалом в $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ — коммутативным идеалом (§ 3, n° 6, предложение 7), т. е. равно нулю. Поэтому $\mathfrak{b}$ является дополнением к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Кроме того, поскольку форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ невырожденна, таковыми будут и ее ограничения на $\mathfrak{a}$ и на $\mathfrak{b}$ (*Алг.* гл. IX, § 4, n° 1, следствие предложения 1), так что $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ полупросты (n° 1, теорема 1, и § 3, n° 6, предложение 9).

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

а) *Все конечномерные линейные представления алгебры $\mathfrak{g}$ полупросты.*

б) *Для ~~данного~~ линейного представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V конечной размерности и данного подпространства W коразмерности 1, такого, что $\rho(x) V \subset W$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, существует прямая, дополняющая W, устойчивая относительно $\rho(\mathfrak{g})$ (и, стало быть, аннулируемая $\rho(\mathfrak{g})$).*

Ясно, что а) влечет за собой б). Предположим, что б) верно. Пусть σ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве M и N — подпространство M, устойчивое относительно $\sigma(\mathfrak{g})$. Пусть μ — представление $\mathfrak{g}$ в $\mathscr{L}(M)$, канонически индуцируемое представлением σ (§ 3, n° 3); напомним, что $\mu(x) = \operatorname{ad}_{\mathscr{L}(M)} \sigma(x)$. Пусть V (соотв. W) — подпространство в $\mathscr{L}(M)$, состоящее из линейных отображений M в N, таких, что их

$f \in \mu: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L}(M))$

$\mu(x) f = [\sigma(x), f] = (\sigma(x) f - f \sigma(x)) \in \mathcal{L}(M)$

$f \in \mathcal{L}(M)$

Т к $\dim(V/W) = \dim A$, где A — пр-во гомотетий из N в N

ограничение на N является гомотетией (соотв. нулевым отображением). Тогда W имеет коразмерность 1 в V и $\mu(x)(V) \subset W$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Согласно условию б), существует элемент $u \in V$, аннулируемый $\mu(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, ограничение которого на N является ненулевой гомотетией. Умножая u на подходящий скаляр, можно считать, что u является проектированием M на N. Так как $\mu(x).u = 0$ означает, что u перестановочно с $\sigma(x)$, то ядро u является дополнением к N в M, устойчивым относительно $\sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Поэтому σ полупросто.

$\Rightarrow \mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли,* ρ — *линейное представление* $\mathfrak{g}$ *в конечномерном векторном пространстве* V *и* W — *подпространство в* V *коразмерности* 1, *такое, что* $\rho(x)(V) \subset W$ *для любого* $x \in \mathfrak{g}$. *Тогда существует прямая, дополняющая* W *и устойчивая относительно* $\rho(\mathfrak{g})$.

Для любого $x \in \mathfrak{g}$ пусть $\sigma(x)$ — ограничение $\rho(x)$ на W. Предположим сначала, что σ неприводимо. Если $\sigma = 0$, то $\rho(x)\rho(y) = 0$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$, откуда $\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathcal{D}\mathfrak{g}) = \{0\}$ и наше утверждение очевидно. Если $\sigma \neq \{0\}$, то пусть $\mathfrak{n}$ — ядро σ, и пусть $\mathfrak{m}$ — идеал, дополняющий $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ (лемма 1); тогда $\mathfrak{m} \neq \{0\}$ и ограничение σ на $\mathfrak{m}$ точно; ограничение на $\mathfrak{m}$ билинейной формы, ассоциированной с σ, невырожденно (предложение 1), поэтому можно построить элемент Казимира c, ассоциированный с $\mathfrak{m}$ и σ. Согласно предложению 12 из § 3, n° 7, $\sigma(c)$ — автоморфизм W. С другой стороны, $\rho(c)(V) \subset W$. Поэтому ядро Z эндоморфизма $\rho(c)$ является прямой, дополняющей W; так как, далее, c принадлежит к центру универсальной обертывающей алгебры для $\mathfrak{g}$, то $\rho(c)$ перестановочно с $\rho(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ и, значит, Z устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{g})$. мало

В общем случае можно рассуждать индукцией по размерности V. Пусть T — ненулевое минимальное устойчивое подпространство в W. Пусть ρ' — факторпредставление в $V' = V/T$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $\rho'(x)(V') \subset W'$, где $W' = W/T$ имеет коразмерность 1 в V'. По предположению индукции существует прямая, дополняющая W' и устойчивая относительно $\rho'(\mathfrak{g})$. Ее прообраз Z в V устойчив относительно $\rho(\mathfrak{g})$, содержит T в качестве подпространства коразмерности 1 и таков, что $Z \cap W = T$, откуда $\rho(x)(Z) \subset T$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Согласно тому, что было доказано выше, существует прямая, дополняющая T в Z, устойчивая относительно $\rho(\mathfrak{g})$; эта прямая является дополнением к W в V, что и завершает доказательство.

Теорема 2 (*Г. Вейль*). *Любое конечномерное линейное представление полупростой алгебры вполне приводимо.*

Это следует из лемм 2 и 3.

Определение 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется простой, если единственными ее идеалами являются $\mathfrak{g}$ и $\{0\}$ и если, кроме того, $\mathfrak{g}$ некоммутативна.*

Простая алгебра Ли полупроста. Алгебра $\{0\}$ не является простой.

Предложение 2. *Для того чтобы алгебра Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы она была произведением простых алгебр.*

Условие является достаточным (n° 1, замечание 3). Обратно, пусть $\mathfrak{g}$ полупроста. Так как присоединенное представление $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{g}$ является прямой суммой ненулевых минимальных идеалов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Поэтому $\mathfrak{g}$ отождествляется с произведением алгебр $\mathfrak{a}_i$ (§ 1, n° 1). Любой идеал в $\mathfrak{a}_i$ является тогда идеалом и в $\mathfrak{g}$, а поэтому равен нулю или $\mathfrak{a}_i$. Кроме того, $\mathfrak{a}_i$ некоммутативен. Поэтому $\mathfrak{a}_i$ являются простыми алгебрами.

Т. к. $\mathfrak{a}_i$ — идеалы

Следствие 1. *Полупростая алгебра Ли является прямым произведением своих простых идеалов $\mathfrak{g}_i$. Каждый идеал в $\mathfrak{g}$ является произведением некоторых из этих $\mathfrak{g}_i$.*

т. к. некоммут.

Имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_m$, где $\mathfrak{a}_i$ просты. Так как центр $\mathfrak{a}_i$ равен нулю, то централизатор $\mathfrak{a}_i$ в $\mathfrak{g}$ является произведением $\mathfrak{a}_j$ для $j \neq i$. Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Если он не содержит $\mathfrak{a}_i$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i = \{0\}$, откуда $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] = \{0\}$ и $\mathfrak{a}$ содержится в произведении $\mathfrak{a}_j$ для $j \neq i$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{a}$ является произведением некоторых из $\mathfrak{a}_j$. Поэтому простые идеалы $\mathfrak{g}$ суть в точности $\mathfrak{a}_i$.

т. к. в цент. равен нулю

т. к. $\mathfrak{a}_i$ просты

$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}$ т. к. $\mathfrak{a}$ - идеал. $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i = 0 \Rightarrow [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] = 0$

$ax = xa \Rightarrow x$ имеет нулевую проекцию на $\mathfrak{a}_i$

Простые идеалы полупростой алгебры Ли называются ее *простыми компонентами.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — две алгебры Ли, $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ — их радикалы и f — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$. Тогда $\mathfrak{r}' = f(\mathfrak{r})$.*

Так как $f(\mathfrak{r})$ разрешима, то $f(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}'$. С другой стороны, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста (§ 5, n° 2, предложение 3), поэтому алгебра $\mathfrak{g}'/f(\mathfrak{r})$, изоморфная факторалгебре алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, сама полупроста (лемма 1), откуда $f(\mathfrak{r}) \supset \mathfrak{r}'$ (§ 5, n° 2, предложение 3).

т. к. алгебра полупроста $\Leftrightarrow$ радикал равен нулю.

Замечания. 1) Теорема 2 допускает обращение: если любое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{g}$ полупроста. В самом деле, так как присоединенное представление полупросто, то любой идеал в $\mathfrak{g}$ обладает дополнительным идеалом, т. е. его можно рассматривать как факторалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ не полупроста, то она обладает ненулевой коммутативной факторалгеброй и, следовательно, одномерной

зом при отображении f *некоторого полупростого* (соотв. *нильпотентного*) *элемента из* $\mathfrak{g}$.

Если ρ — представление алгебры $\mathfrak{g}'$, то $\rho \circ f$ — представление $\mathfrak{g}$, откуда следует первое утверждение. Если f сюрьективен, то существует гомоморфизм g алгебры $\mathfrak{g}'$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $f \circ g$ — тождественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}'$ (n° 1, следствие 2 предложения 1), так что второе утверждение следует из первого.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли.*

а) *Пусть* $x \in \mathfrak{g}$. *Если существует точное представление* ρ *алгебры* $\mathfrak{g}$, *такое, что* $\rho(x)$ — *полупростой* (соотв. *нильпотентный*) *эндоморфизм, то* x *полупрост* (соотв. *нильпотентен*).

б) *Любой элемент из* $\mathfrak{g}$ *может быть единственным образом записан в виде суммы коммутирующих полупростого и нильпотентного элементов.*

Пусть выполнены предположения утверждения а). Пусть, далее, σ — представление $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — идеал, дополняющий ядро σ, и α — проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{b}$. Тогда $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ по следствию из предложения 3 полупрост (соотв. нильпотентен), откуда и $\mathrm{ad}_{\mathfrak{b}}\, \alpha(x)$ полупрост (соотв. нильпотентен). Так как $\sigma(x) = \sigma(\alpha(x))$, то первое утверждение вытекает из следствия предложения 3. Второе утверждение следует тогда из предложения 3, примененного к какому-либо точному представлению.

4. Редуктивные алгебры Ли

Определение 4. *Алгебра Ли называется редуктивной, если ее присоединенное представление полупросто.*

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли, а* $\mathfrak{r}$ — *ее радикал. Следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathfrak{g}$ *редуктивна;*

б) $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ *полупроста;*

в) $\mathfrak{g}$ *является произведением полупростой и коммутативной алгебр;*

г) $\mathfrak{g}$ *обладает конечномерным представлением с невырожденной ассоциированной билинейной формой;*

д) $\mathfrak{g}$ *обладает точным конечномерным полупростым представлением;* модуль g-полупрост

е) *нильпотентный радикал алгебры* $\mathfrak{g}$ *равен нулю;*

ж) $\mathfrak{r}$ *является центром* $\mathfrak{g}$.

а) $\Rightarrow$ б). Если присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{g}$ является прямой суммой ненулевых минимальных идеалов $\mathfrak{a}_i$, значит $\mathfrak{g}$ изоморфна произведению $\mathfrak{a}_i$, причем каждая из алгебр $\mathfrak{a}_i$ не содержит других идеалов, кроме $\{0\}$ и $\mathfrak{a}_i$, т. к min. т. е. $\mathfrak{a}_i$ либо проста, либо коммутативна размерности 1.

Т-g в g/Dg только т.е эл-ты которые дают нуль

т.к Dg - идеал. n°2.

Следовательно, $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ совпадает с произведением тех $\mathfrak{a}_i$, которые являются простыми, и, таким образом, полупроста.

б) $\Rightarrow$ в). Если $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{g}$ изоморфна произведению $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и алгебры Ли $\mathfrak{h}$ (n° 1, следствие 1 предложения 1); $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и, значит, коммутативна. стр 13 следствие

в) $\Rightarrow$ г). Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две алгебры Ли, ρ_i — конечномерное представление $\mathfrak{g}_i$, β_i — билинейная форма на $\mathfrak{g}_i$, ассоциированная с ρ_i ($i = 1, 2$). Можно рассматривать ρ_1 и ρ_2 как представления алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$; пусть ρ — их прямая сумма. Ясно, что билинейная форма, ассоциированная с ρ, является прямой суммой β_1 и β_2, поэтому она невырожденна, если невырожденны β_1 и β_2. Теперь для доказательства импликации в) $\Rightarrow$ г) достаточно рассмотреть два таких случая: 1) $\mathfrak{g}$ полупроста; тогда присоединенное представление имеет в качестве ассоциированной формы форму Киллинга, которая невырожденна; 2) $\mathfrak{g} = K$; тогда тождественное представление $\mathfrak{g}$ в K имеет невырожденную ассоциированную билинейную форму.

г) $\Rightarrow$ д). Пусть ρ — конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ и β — ассоциированная билинейная форма. Согласно предложению 4 из § 4, n° 3, существует полупростое конечномерное представление σ алгебры $\mathfrak{g}$, такое, что ядро $\mathfrak{n}$ этого представления ортогонально к $\mathfrak{g}$ относительно β. Если β невырожденна, то $\mathfrak{n} = \{0\}$, т. е. σ точно.

д) $\Rightarrow$ е). Это очевидно.

е) $\Rightarrow$ ж). Если нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю, $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$ также равен нулю (§ 5, n° 3, теорема 1); так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$, то $\mathfrak{r}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$.

ж) $\Rightarrow$ а). Если $\mathfrak{r}$ — центр $\mathfrak{g}$, то присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ совпадает с присоединенным представлением алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, являющейся полупростой алгеброй Ли (§ 5; n° 2, предложение 3); это представление, таким образом, полупросто (теорема 2).

Замечание. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает разложением в виде произведения $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ коммутативной алгебры $\mathfrak{a}$ и полупростой алгебры $\mathfrak{b}$, то это разложение единственно. Более точно, центр $\mathfrak{g}$ равен произведению центров $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, т. е. равен $\mathfrak{a}$, а $\mathscr{D}\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{a} \times \mathscr{D}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$.

Следствие. а) *Всякое конечное произведение редуктивных алгебр Ли является редуктивной алгеброй.*

б) *Если $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли с центром $\mathfrak{c}$, то любой идеал в $\mathfrak{g}$ является ее прямым сомножителем, равным произведению своих пересечений с $\mathfrak{c}$ и $\mathscr{D}\mathfrak{g}$, и редуктивной алгеброй Ли.*

в) *Факторалгебра редуктивной алгебры Ли редуктивна.*

Утверждение а) следует, например, из условия в) предложения 5.